

INTERPOLACIÓN DE LA ONDULACIÓN GEOIDAL GEOMÉTRICA MEDIANTE UNA RED NEURONAL ARTIFICIAL MULTICAPA

JOSE LUIS CARRION¹; DANIEL DEL COGLIANO²; ALFONSO TIERRA³

^{1,2} MAESTRIA EN GEOMATICA. UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA. La Plata, Buenos Aires, Argentina. ¹josecarrions@hotmail.com; ²daniel@fcaglp.unlp.edu.ar

³CENTRO DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS, DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y LA CONSTRUCCION. ESCUELA POLITÉCNICA DEL EJÉRCITO. Av. Gral Rumiñahui, s/n. Sangolquí – Ecuador. artierra@espe.edu.ec

Recibido: 4 de abril de 2011 / Aceptado: 15 de octubre de 2011

RESUMEN

El desarrollo de técnicas de posicionamiento satelital, proporciona la posibilidad de disponer de coordenadas geográficas de alta precisión, que tienen como referencia un datum geocéntrico y un modelo geométrico o elipsoide de referencia para su representación en valores angulares, consiguiendo de esta forma aproximar la forma terrestre. Cada punto sobre la superficie del planeta cuenta con una posición definida por su latitud, longitud y altura elipsoidal; los dos primeros valores proveen la ubicación horizontal con respecto a referencias convencionales que están definidas sobre el elipsoide de referencia. La altura elipsoidal por su parte representa la distancia medida sobre la normal al elipsoide desde el punto posicionado hasta dicha superficie de referencia, es decir esta altura es una expresión geométrica de la distancia existente entre el punto posicionado y la superficie de referencia (elipsoide); esto se convierte en un inconveniente al tomar en consideración que para ser utilizadas en proyectos de ingeniería, las alturas medidas sobre la superficie terrestre deben tener un significado físico, esto implica tener en cuenta la distribución de masas del planeta y su campo gravitatorio. Siendo indispensable disponer de una superficie de referencia para las alturas que considere estas variables físicas. Esta superficie debe ser equipotencial, esto significa que deberá contar con iguales valores de potencial gravitacional para todos los puntos que la conforman. La superficie equipotencial que usamos como referencia para las alturas se conoce como geoide y es aquella que más se aproxima al nivel medio de los océanos en reposo en una época determinada, esta superficie es difícil de determinar debido al comportamiento dinámico de los océanos y por el desconocimiento de las densidades internas del planeta. La representación del geoide se realiza en función de su separación con respecto a un elipsoide de referencia, y se conoce como ondulación geoidal, las alturas medidas desde el geoide a la superficie terrestre se conocen como alturas ortométricas. La relación entre alturas elipsoidales y alturas ortométricas posibilita el cálculo de ondulaciones geoidales; el método geométrico (GPS/nivelación) para la determinación del geoide consiste en obtener valores de ondulación geoidal partiendo de valores conocidos de alturas elipsoidales y alturas niveladas (toman como referencia el nivel medio del mar). Esta metodología genera valores de ondulación geoidal en forma puntual, por esta razón, cuando se requiere conocer cuál es el comportamiento del geoide en un punto en el cual no se conocen los datos necesarios para su cálculo, se hace necesaria la aplicación de métodos de interpolación o estimación de variables que emplean principios geoestadísticos. En este trabajo se presenta un método de interpolación basado en el entrenamiento de una Red Neuronal Artificial del tipo

Multicapa-RNAM con datos obtenidos en un área del Ecuador Continental, con el objetivo de obtener valores de ondulación geoidal. Los resultados obtenidos mediante la interpolación con al RNAM presentan errores menores a 15 centímetros

Palabras clave. GPS, Ondulación Geoidal, Red Neuronal Artificial

ABSTRACT

The development of satellite positioning techniques, provides the possibility of having geographical coordinates of high precision, that have like reference a geocentric datum and a geometric model or reference ellipsoid for their representation in angular values, obtaining thus approximate the terrestrial form. Each point on the surface of the planet counts on a position defined by its latitude, longitude and ellipsoidal height; both first values provide the horizontal location with respect to conventional references that are defined on the reference ellipsoid. The ellipsoidal height represents the distance measured on the normal of the ellipsoid from the point positioned to this reference surface, this height is a geometric expression of the distance between the positioned point and the reference surface (ellipsoid); this becomes a disadvantage when taking into consideration that for use in engineering projects, the heights measured on the terrestrial surface must have a physical meaning, this implies to consider the distribution of masses of the planet and its gravitational field. It is, then indispensable to have a reference surface for the heights that considers these physical variables. This surface must be equipotential, this means that it will have to count on equal values of gravitational potential for all the points conform that it. The equipotential surface that we used as reference for the heights is known like geoid and is that one that comes near more at the mean level of the oceans in rest at a determined time, this surface is difficult to determine due to the dynamic behaviour of the oceans and by the ignorance of the internal densities of the planet. The representation of geoid is realised based on its separation with respect to a reference ellipsoid, and it is known like geoidal undulation, the heights measured from geoid to the terrestrial surface are known like orthometric heights. The relation between ellipsoidal heights and orthometric heights makes possible the calculation of geoids undulations; the geometric method (GPS/leveling) for the geoid determination consists of obtaining values of geoidal undulation dividing of values known ellipsoidal heights and made level heights (take like reference the mean sea level). This methodology generates precise values of geoidal undulation, therefore, when it is required to know what is the behavior of geoid in a point in which the necessary data for their calculation are not known, becomes the application of methods interpolation or estimation necessary of variables that use geostatistical principles. In the present work, it used an interpolation method interpolation based on Multilayer Artificial Neural Network Techniques using data obtained in a Continental Ecuador area, with the aim of obtaining values of geoidal undulation. The first results, when it used of the RNAM show errors smaller to 15 cm.

Key words. GPS, Ondulation Geoid, Artificial Neural Network

1. INTRODUCCION

La determinación del Modelo Geoidal es una tarea fundamental que se está ejecutando en varias partes del mundo y en especial en América del Sur. Han sido desarrollados varios métodos para la determinación de geoides regionales o locales

con miras a optimizar el uso del GPS (Global Positioning System) en las aplicaciones prácticas (Del Cogliano, 2006), (Tierra, 2003).

El método geométrico para determinación del geoide (GPS/nivelación) aporta información discreta acerca del comportamiento del campo de la gravedad terrestre, esta información permite obtener a partir de su interpolación modelos geoidales para áreas específicas en donde se cuenta con datos puntuales de altura nivelada y altura elipsoidal para el mismo registro. La altura elipsoidal es derivada del empleo de técnicas de posicionamiento satelital y referida a un elipsoide de referencia y la altura nivelada proveniente de las redes de nivelación y referida al dátum vertical de cada país; estas dos variables dan la posibilidad de inferir un valor de ondulación geoidal para cada uno de los puntos dato con que se cuente.

El método de interpolación empleado, sin duda, determinará en función de sus cualidades y defectos, la calidad del producto obtenido en la predicción del comportamiento de las variables modeladas. En el presente trabajo se realiza la interpolación de ondulaciones geoidales en función de datos GPS/nivelación distribuidos en forma dispersa en un área de trabajo determinada, empleando técnicas de inteligencia artificial; se realizará la generalización de la variable estudiada (ondulación geoidal) luego del entrenamiento supervisado de una red neuronal artificial.

2. ZONA DE TRABAJO

El área en la cual se desarrolló el trabajo, corresponde a una región delimitada en función de la distribución espacial de los datos, la misma incluye en forma parcial provincias de la región Sierra y Costa del Ecuador Continental.

En la tabla 1, se indica el área y su respectivo porcentaje de las provincias de la región Costa, las cuales son: Esmeraldas, Guayas, Los Ríos, y Manabí; de igual manera en la tabla 2, se indica de las provincias de la región Sierra que son Cotopaxi, Pichincha y Santo Domingo de los Tsáchilas.

Tabla 1. Superficie en kilómetros cuadrados que cada provincia de la región costa ocupa en la zona de trabajo, con sus respectivos porcentajes.

Provincia	Área en la zona de trabajo (km ²)	Porcentaje de la zona de trabajo
Esmeraldas	523.61	2.15
Guayas	550.55	2.26
Los Ríos	1659.43	6.82
Manabí	11538.71	47.40
Zona no delimitada	488.04	2.00
TOTAL	14760.34	60.63

Tabla 2. Superficie en kilómetros cuadrados que cada provincia de la región sierra ocupa en la zona de trabajo, con sus respectivos porcentajes.

Provincia	Área en la zona de trabajo (km ²)	Porcentaje (%) de la zona de trabajo
Cotopaxi	2881.92	11.84
Pichincha	3255.57	13.37
Santo Domingo de Los Tsáchilas	3446.65	14.16
TOTAL	9584.14	39.37

El área total aproximada abarca 24344.48 Km2, correspondiendo un 60.63 % de la misma a la región costa, en donde se registran las menores altitudes y un 39.37 a la región Sierra, que posee los valores de altitud más altos y un relieve marcadamente irregular. Entre estas dos regiones geográficas, a manera de límite natural, se encuentra atravesando de norte a sur la cordillera de los Andes. El rango de altitudes en el área de trabajo va desde los 3m hasta los 5245 m sobre el nivel medio del mar.

En la Figura 1, se muestra el mapa del Ecuador Continental, y dentro de ella , con la línea de color rojo, se puede apreciar la ubicación geográfica de la zona de trabajo en donde se calculó las ondulaciones geoidales.

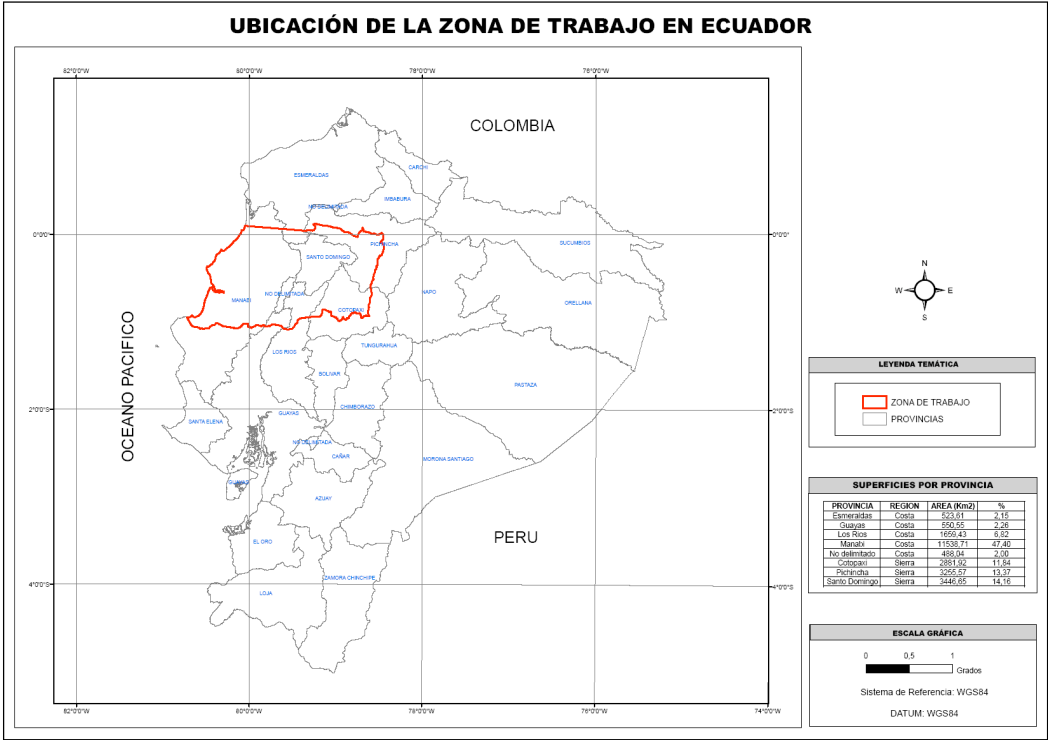


Figura 1. Ubicación del área de estudio

3. METODOLOGIA

3.1 RECOPIACIÓN DE INFORMACIÓN NECESARIA

Los datos de puntos GPS/nivelación que se han empleado se originan de trabajos de campo previos realizados por el Instituto Geográfico Militar (IGM) y de dos campañas GPS ejecutadas con motivo de la realización de este proyecto. Para la determinación de las alturas, se hizo mediante nivelación geométrica obteniéndose alturas referidas al Datum Vertical del Ecuador, cuyo mareógrafo se encuentra ubicado en la Libertad, en la Provincia de Santa Elena. Para la obtención de las alturas elipsoidales se realizó posicionamiento satelital mediante el uso de receptores GPS que disponían de las dos frecuencias. El método fue el relativo mediante un posicionamiento estático y dejando por lo menos una hora de rastreo continuo. Con la nivelación se obtiene la altura nivelada (H_n) y con posicionamiento GPS se obtiene la altura elipsoidal (h), y la ondulación geoidal (n) puede ser obtenida por la diferencia de estas dos alturas de acuerdo a la ecuación (01)

$$n = h - H_n \quad (01)$$

De un total de 72 puntos considerados para el entrenamiento de la red neuronal artificial (RNA), 57 corresponden a aquellos obtenidos por parte del IGM y 15 a los obtenidos en campañas GPS realizadas para complementar la información dentro del área de estudio, en donde los datos eran escasos. La distribución espacial de los puntos GPS/nivelación se muestran en la Figura 2.

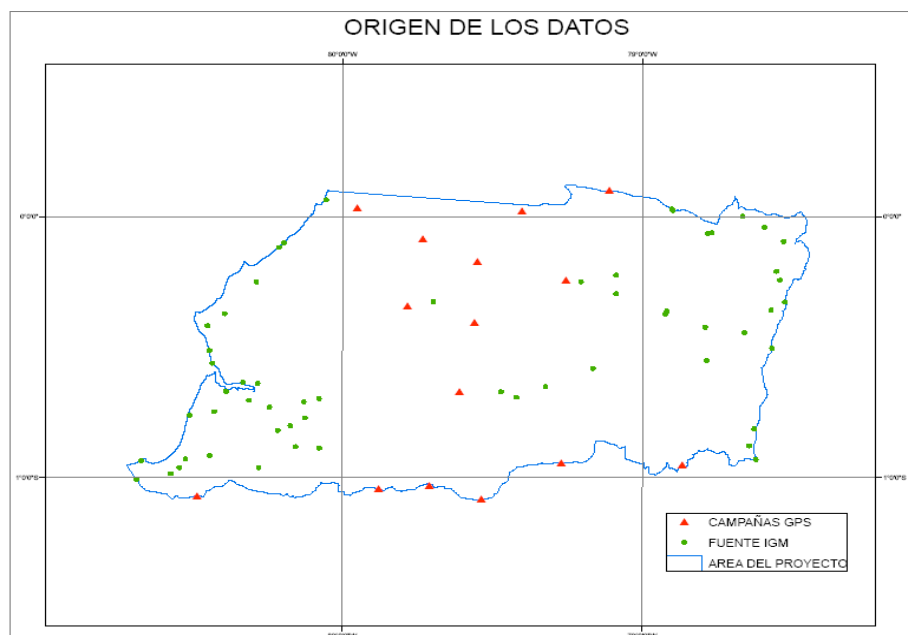


Figura 2. Origen de los puntos GPS/nivelación en el área de estudio

El conjunto de puntos mostrado se dividió en tres subconjuntos, esto se debe a que para el entrenamiento de la RNA, es necesario contar con un grupo de datos para el entrenamiento propiamente dicho, otro conjunto de validación y un tercer conjunto de test. El primer conjunto sirve para realizar el proceso de entrenamiento hasta lograr el aprendizaje deseado, el segundo sirve para determinar la calidad de la generalización que se puede obtener con la RNA entrenada, y el tercer conjunto que no intervinieron en las dos etapas anteriores, sirve para evaluar los errores, que se pueden obtener cuando realizo las interpolaciones usando la RNA entrenada en cualquier punto dentro del área de estudio. Una vez que se tenga la RNA entrenada de acuerdo a las necesidades que se desee o de acuerdo el nivel de aprendizaje alcanzado, se puede usar esta red neural para generar un mapa de ondulaciones geoidales para el área de estudio.

La selección de las placas o hitos de nivelación en donde se realizó el posicionamiento de precisión de los nuevos puntos, estuvo condicionada por la ubicación de las líneas de nivelación y existió el inconveniente adicional de que algunos de los puntos se encuentran destruidos, o su ubicación no permite contar con las condiciones necesarias para que el posicionamiento se pueda realizar con una cobertura de satélites apropiada (cercanía a construcciones, principalmente). Se empleó un equipo Trimble 5800, tomando como referencia una estación de monitoreo continuo y rastreando con intervalos de 15 segundos por dos horas y media en cada punto. El postproceso se lo hizo usando el software “Trimble Business Center” y con efemérides precisas y doble diferencia de fase. La Figura 3, muestra algunos sitios en donde fue realizado el rastreo con GPS en las placas de nivelación obtenidas con la nivelación geométrica por parte del IGM.



Figura 3. Registro fotográfico campañas GPS sobre placas de nivelación

3.2 ENTRENAMIENTO DE LA RED NEURONAL ARTIFICIAL

Una vez que se tuvo el conjunto de puntos dato, se dividió al mismo en los tres subconjuntos antes mencionados, quedando 58 puntos para entrenamiento de color verde, 7 para validación de color azul, y 7 para test de color rojo, como se puede observar en la Figura 4.

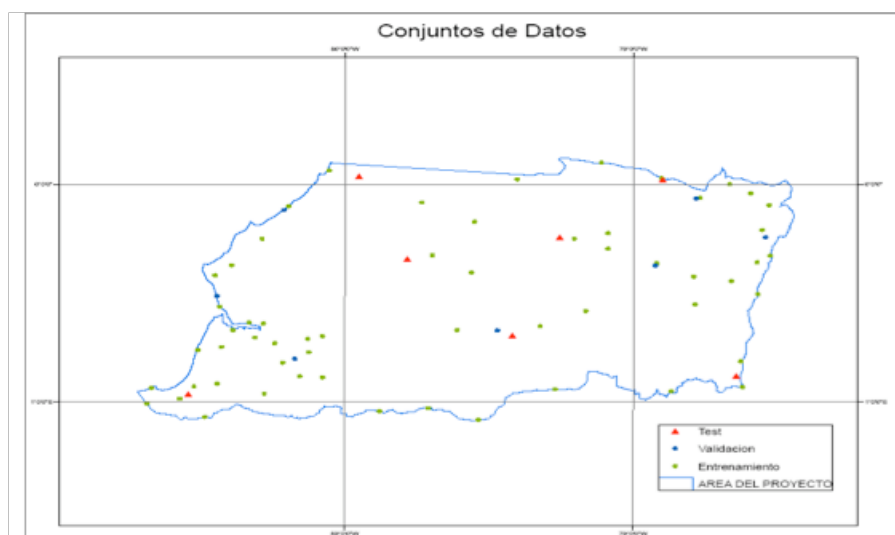


Figura 4. Conjuntos de entrenamiento, validación y test en el área de estudio

El entrenamiento o aprendizaje de la RNA consiste en presentar datos de los cuales se conoce una determinada característica que se relaciona con una salida también conocida, este proceso se conoce como aprendizaje supervisado de la RNA, ya que se le muestra la salida esperada o deseada ante una determinada entrada (Basogain, 2008), (Haykin, 2001), (Isasi&Galván, 2004). Para el caso de la presente investigación, las entradas que se proporcionan a la RNA son latitud – longitud – altura elipsoidal del punto con su respectiva salida: ondulación geoidal. Esto permite que el usuario de la herramienta generada pueda estimar valores de ondulación geoidal en puntos para los cuales se conoce su latitud, longitud y altura elipsoidal. Las coordenadas de los puntos dato fueron todas llevadas al sistema de referencia ITRF05 época de referencia 2011.1, con el fin de homogeneizar la información disponible. Para este último se empleó el programa “Transformación de Coordenadas con ITRF’s y Épocas de Referencia utilizando 7 y 14 parámetros de transformación” (Santacruz, 2010) y el “Modelo de Velocidades para América del Sur y el Caribe” VEMOS 2009 (Drewes & Heidbach, 2009).

La diferencia entre el conjunto de datos de test y el de validación es que en este último, los datos participan en el aprendizaje de la RNA, ya que es en base a estos que se determina hasta qué punto la RNA es capaz de generalizar, por su parte los puntos test, no participan de ninguna manera en el proceso de aprendizaje o entrenamiento

de la RNA y representan una medida insesgada de el desempeño de la RNA en la estimación de la variable. El número de puntos de validación y puntos test se fijó en 7 ya que la cantidad de datos disponible no permitía elevar este número sin producir un decremento sensible en la cantidad de información que se muestra a la RNA durante el proceso de entrenamiento de la misma.

3.3 ARQUITECTURA DE LA RED NEURONAL ARTIFICIAL

Para el entrenamiento de la RNA se usó una arquitectura de red tipo feed forward (Haykin, 2001), y basándose en el algoritmo de aprendizaje de Levenberg – Marquardt (Garnés, 1996). Se definió una red neuronal con tres capas de neuronas, una capa de entrada, una capa oculta y una capa de salida. Por lo tanto, al ser las entradas a la red latitud – longitud – altura elipsoidal, para el entrenamiento de la red se tiene una capa con tres entradas.

El número de neuronas en la capa oculta se define a medida que se realiza el entrenamiento de la RNA, esto quiere decir que la cantidad de neuronas en esta capa va a tener relación con el desempeño de la red y la minimización de los errores que esta genera en la estimación de la variable.

La red neuronal artificial que se entrenó en este proyecto fue una [3 25 1], esto indica que tuvo 3 variables en la capa de entrada, 25 neuronas en la capa oculta, y una neurona en la capa de salida, como se puede observar en la Figura 5. La capa de salida es en donde se generan los resultados de la red, que para este estudio la salida es la ondulación geoidal.

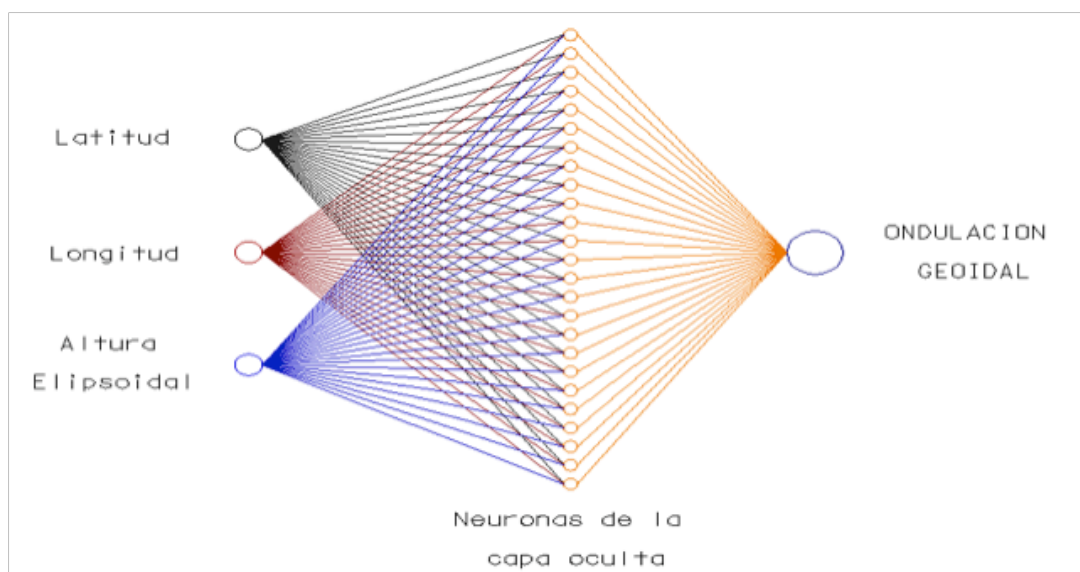


Figura 5. Arquitectura de la red neuronal artificial con 3 variables en la capa de entrada 25 neuronas en la capa oculta una neurona en la capa de salida

Antes de realizar el proceso de entrenamiento-aprendizaje de una RNA, se debe definir la estructura de la RNA como el caso de la Figura 5. Para realizar el entrenamiento de la red se generó un script en el software MATLAB mediante la utilización del Artificial Neural Network Toolbox, en el cual se especifica la arquitectura o estructura de la RNA, los parámetros del aprendizaje y el algoritmo de entrenamiento a usar, con el fin de automatizarlo. El proceso de aprendizaje se repite hasta alcanzar un buen nivel de generalización o hasta que la RNA haya llegado a un límite de aprendizaje

El entrenamiento de la RNA busca mostrar patrones de comportamiento de la variable para que la red almacene esta información dentro de su estructura, es un proceso iterativo en el cual para cada entrada que se muestra a la red se calcula un error en función del valor calculado por la red para la variable y el valor real de la variable en cada punto de entrenamiento (Haykin, 2001).

Los valores reales de salida correspondientes a los puntos de entrenamiento (valores esperados o targets) también son proporcionados a la red durante el entrenamiento, a esta forma se lo conoce como aprendizaje bajo la supervisión de un profesor o llamado también entrenamiento supervisado. Este método es usado con la finalidad de calcular la diferencia existente entre el valor de salida que da la RNA con el valor deseado. A esta diferencia, se lo conoce como error y este valor debe ser minimizado, por lo que hay que calcular nuevamente los pesos sinápticos de toda la red, hasta que el error de salida sea mínimo.

Las salidas que genera la RNA están en función de los pesos sinápticos o enlaces de cada una de las neuronas que la conforman en las diferentes capas, estos pesos o parámetros libres de la red son reajustados o recalculados a lo largo del entrenamiento usando para esto un algoritmo de aprendizaje que se basa en la minimización de una función de error. Cuando la red ha aprendido el comportamiento de la variable, se encuentra en la capacidad de estimar valores de la misma para otros puntos que no participaron en el proceso de aprendizaje y que pueden servir para evaluar el nivel de aprendizaje y la calidad de la generalización de la variable con fines de interpolación, en este caso de la ondulación geoidal para el área de estudio de acuerdo a la distribución de los datos.

4. RESULTADOS

Los puntos test fueron utilizados para calcular las ondulaciones geoidales a partir de diferentes modelos existentes y de la RNA entrenada con la finalidad de poderlos evaluarlos y determinar las diferencias existentes entre ellos. Estos puntos test fueron utilizados en los modelos RNA, EGM96 (Leimone, et. al., 1998) y EGM08 (Pavlis, 2008) y en los de Mínimos Cuadrados Colocación (Echeverría, 2010) para calcular las respectivas ondulaciones geoidales y poder determinar el comportamiento de la RNA en su generalización.

Los resultados obtenidos por estos modelos son mostrados en la tabla 3, mediante el cálculo de los estadísticos de la media aritmética, desviación estándar, valor mínimo y valor máximo.

Tabla 3. Valores máximo, mínimo, media y desviación estándar para los errores calculados en la estimación de ondulación geoidal en puntos test

Método	Red Neuronal Artificial (metros)	EGM06 (metros)	EGM_2008 (metros)	Mínimos cuadrados Colocación (metros)
Máximo	0,121	1,471	1,31	0,694
Mínimo	-0,124	-0,618	0,172	-0,496
Media	-0,002	0,742	0,608	0,066
Desviación Estándar	0,083	0,704	0,355	0,423

En la tabla 3, se puede observar que la media de los errores obtenidos con la RNA son menores que los otros modelos, de la misma manera la desviación estándar, la variación o amplitud obtenida con la RNA es de 0.245 m, mientras que con el EGM96 es 2.089 m, con el EGM08 1.482 m y con Mínimos Cuadrados Colocación (LSC, por su siglas en inglés) es 1.08 m. Lo que indica que la técnica de interpolación usando una red neuronal artificial mejora los resultados cuando tengo datos que son dispersos e irregulares en su distribución a lo largo del área de estudio y con diferentes condiciones topográficas.

Si bien es cierto que en el caso de los modelos geopotenciales EGM06 y EGM2008, el nivel de detalle que presentan los mismos no permite realizar una valoración del modelo como se lo podría hacer con otro modelo de carácter local, la comparación con estos expresa una mejoría en términos de cálculo de errores y cumple con la premisa fundamental de este tipo de estudios al contar con una estimación de la variable cada vez más aproximada.

La técnica de redes neuronales artificiales presenta un buen desempeño cuando se trata de aproximar o estimar variables de las cuales se dispone datos con una distribución espacial irregular.

Una vez realizado el entrenamiento de la RNA, está lista para proporcionar valores estimados de la variable, ante nuevas entradas que no formaron parte del proceso de entrenamiento-aprendizaje. De esta manera, la RNA fue utilizada para generar una malla regular de ondulaciones geoidales en toda el área de estudio, y posteriormente se generó un mapa de ondulaciones geoidales. Las Figura s 6 y 7, muestran dos formas diferentes de visualizar las ondulaciones geoidales.

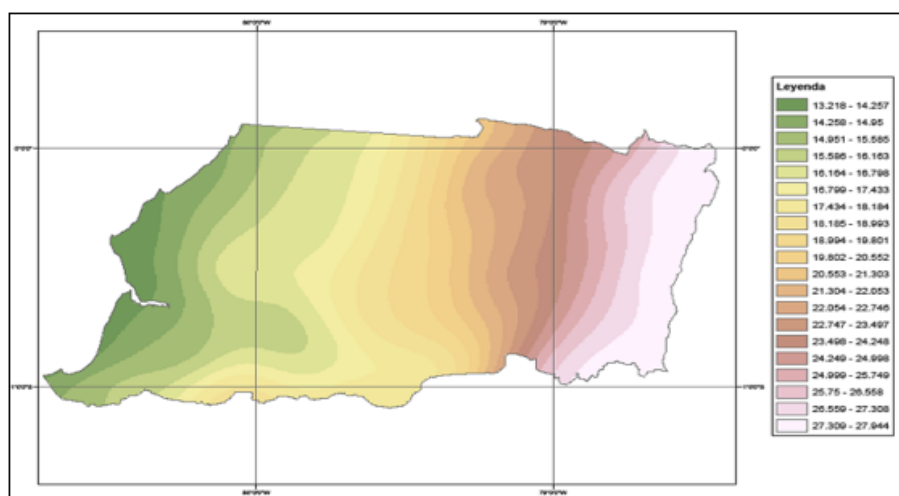


Figura 6. Modelo de ondulaciones geoidales partiendo de puntos generados por la RNA

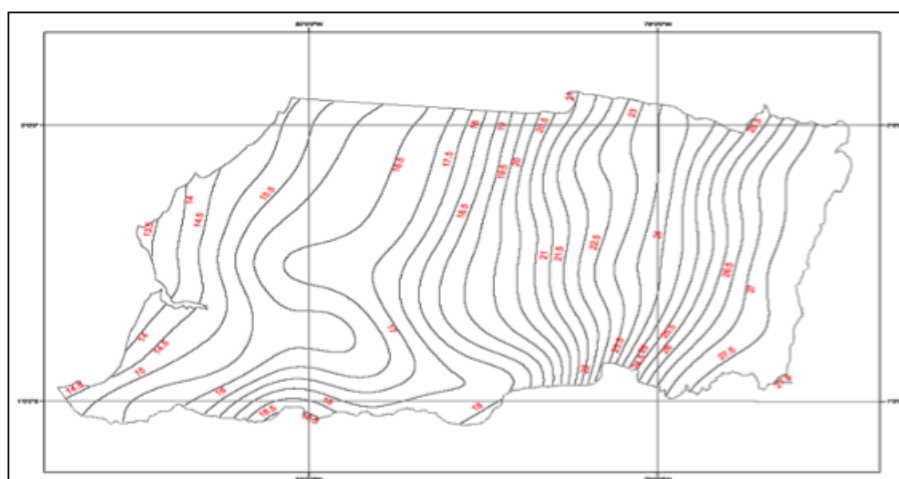


Figura 7. Mapa de curvas de ondulaciones geoidales con intervalo de 0.5 metros partiendo de puntos generados por la RNA

5. CONCLUSIONES

- El desempeño de una red neuronal artificial proporciona una herramienta útil en la estimación de variables.
- Contrastando los resultados obtenidos con el empleo de la RNA y los que se logran con otros métodos, se puede apreciar que al comparar los valores estimados con los valores reales en puntos de validación, los errores se reducen significativamente mediante el empleo de una red neuronal artificial entrenada.

- Es de fundamental importancia que los datos que se usan como insumos para el entrenamiento de la RNA representen los patrones de comportamiento de la variable dentro del área de estudio, esto permite lograr una capacidad de generalización satisfactoria.
- El desarrollo de este trabajo, se limita a un área de estudio en donde se cuenta con datos que permiten realizar el entrenamiento de la red, sin embargo la metodología utilizada se puede aplicar en otras zonas con diferentes características.

REFERENCIAS

- Basogain, X. 2008. Redes Neuronales Artificiales y sus Aplicaciones. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Escuela Superior de Ingeniería de Bilbao, Bilbao - España.
- Del Cogliano, D. 2006. Tesis Doctoral: Modelado del geoide con GPS y Gravimetría. Caracterización de la Estructura Geológica de Tandil. Universidad de Rosario, Rosario - Argentina.
- Dos Anjos, S. 1996. Ajustamento Paramétrico Por Mínimos Quadrados Com Análise na Estabilidade da Solução, Universidade Federal do Paraná. Curitiba - Brasil.
- Drewes, H. and O. Heidbach. 2009. The 2009 horizontal velocity model for South America and the Caribbean. Submitted to C. Pacino et al. (Eds.). IAG Scientific Assembly "Geodesy for Planet Earth". Buenos Aires, August 31 to September 4.
- Echeverría, N. 2010. Generación de un modelo de ondulaciones geoidales de una zona del Ecuador Continental a partir de datos dispersos mediante mínimos cuadrados", Tesis de grado de Ingeniería. Carrera de Ingeniería Geográfica y del Medio Ambiente. Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción. Escuela Politécnica del Ejército. pp.222, Sangolquí, Ecuador.
- Haykin, S. 2001. Redes Neurais, Princípios e Prática, Segunda Edição, Editorial Bookman, Título original: Neural Networks. Hamilton, Ontário, Canadá.
- Isasi, P; Galván, I. 2004. Redes de Neuronas Artificiales. Un Enfoque Práctico, Editorial Pearson Educación S.A. Madrid España.
- Lemoine, F. et.al. 1998. The Development of the Joint NASA and NIMA Geopotential Model EGM96-NASA/TP. USA.
- Pavlis, N; Holmes, A; Kenyon, S; Factor, J. 2008. An Earth Gravitational Model to Degree 2160:EGM08. NGA, USA.
- Santacruz, G. 2010. Transformación ENTRE EL Sistema PSAD56 y los Marcos de Referencia ITRF utilizando los modelos de Helmert y de Velocidades de Placas Tectónicas VEMOS. Tesis de grado de Ingeniería. Carrera de Ingeniería Geográfica y del Medio Ambiente. Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción. Escuela Politécnica del Ejército. pp.162, Sangolquí, Ecuador.
- Tierra, A. 2003. Metodología para a Geração da Malha de Anomalias Gravimétricas para obtenção de Geoide Gravimétrico Local a partir de Dados Esparsos. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas). Departamento de Geomática. Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.